Primljen: 30.03.2020. Stručni rad
Prihvaćen: 13.05.2020. UDK: 51:7.01

Fraktali

Fractals

[1]Marina Trstenjak Petran, [2]Valentina Novak

[1]Srednja škola Čakovec, Jakova Gotovca 2, Čakovec, Hrvatska

[2]III. gimnazija, Kušlanova 52, Zagreb, Hrvatska

email: [1]mtmarina824@gmail.com, [2]valentina.novak25@gmail.com

Sažetak: *Za opisivanje oblika koji su nastali kao djelo čovjekovog uma, koristi se klasična geometrija. Nepravilne, razigrane linije prirode gotovo je nemoguće opisati jezikom klasične geometrije pa se za opisivanje oblika nastalih u prirodi koristi fraktalna geometrija. Krošnje drveća, struktura krvožilnih sustava, snježne pahulje, listovi kupusa, listovi paprati, sustav riječnih tokova, planinski lanci i munje samo su neki primjeri nepravilnih, fraktalnih oblika od kojih je satkan naš svijet. Fraktali su prikladniji za opisivanje nepravilnih oblika jer daju jednaku razinu detalja neovisno o razlučivosti koju koristimo. Riječ je o geometrijskom obliku kojeg odlikuje svojstvo da je svaki njegov dio sličan cjelini, odnosno čitavom fraktalu. Teorija fraktala našla je primjenu u raznim područjima čovjekovog djelovanja i postala nezamjenjiv alat za razumijevanje skrivenih pravilnosti prirode i njenog ustroja.*

Ključne riječi: *fraktal, samosličnost, iteracija, fraktalna dimenzija*

Abstract: *We use classical geometry to describe the forms that were created as an act of the man's mind. Irregular, playful lines of nature are almost impossible to describe using the language of classical geometry so, in order to describe the forms created in nature, fractal geometry is used. Treetops, cardiovascular system structure, snow flakes, cabbage leaves, fern leaves, river flow system, mountain chains and lightning are just some of the examples of irregular, fractal forms that make up our world. Fractals are the most suitable to describe irregular forms because they give the same level of details regardless of the resolution we use. They represent a geometrical form caracterized by the feature that each part of it is similar to the whole, i.e. to the whole of the fractal. The theory of fractals is widely used in* *diffrent parts of human activities and it has become an irreplaceable tool for understanding of hidden regularities of nature and its system.*

Key words: *fractal, self-similarity, iteration, fractal dimension*

1. Fraktal

Klasična geometrija opisuje svijet idealnih oblika poput krugova, kvadrata, kugli ili kocaka. Što je s nepravilnim, različitim oblicima i linijama koje pronalazimo u prirodi? Za opisivanje oblika poput munje, drveća, snježnih pahuljica, krvožilnoga sustava, listova paprati ili planina koriste se fraktali i fraktalna geometrija.

Fraktal je geometrijski lik koji se može raščlaniti na manje dijelove tako da svaki od njih, barem približno bude umanjena kopija cjeline. Takvi se likovi nazivaju samosličnima. Predstavljaju objekte koji daju jednaku razinu detalja neovisno o razlučivosti koja se koristi. Tim geometrijskom objektima je fraktalna dimenzija strogo veća od topološke dimenzije. Moguće ih je uvećati beskonačno mnogo puta, a da se pri svakom novom uvećanju mogu vidjeti detalji koji prije povećanja nisu bili vidljivi te da količina novih detalja bude uvijek otprilike jednaka. Naziv fraktal potječe od latinske riječi „*fractus*“ što znači slomljen, razlomljen. Osim što su razlomljeni, za fraktale je karakteristično da se isti oblik stalno ponavlja, a ako se neki dio fraktala uveća izgledat će kao cijeli fraktal. (Mandelbrot, 1983.)

2. Povijest fraktala

Fraktali su poznati od davnih vremena, samo ih ljudi kao takve nisu poznavali. Opis fraktala kao uzoraka nastalih korištenjem pentagona nalazimo u 16. stoljeću u „Priručniku za slikanje“ Albrechta Dürera. U matematiku fraktale uvodi antički astronom i matematičar Apologize koji je primijetio da unutar jedne kružnice možemo upisati beskonačno mnogo manjih kružnica koje se međusobno dodiruju. Leibniz, u svojim radovima, spominje fraktalnu strukturu u 17. stoljeću definirajući ponavljanje samosličnosti na primjeru dužine. Mnogi matematičari u 19. i 20. stoljeću bavili su se proučavanjem i crtanjem fraktalnih oblika. Hilbert, Koch i Sierpiński proučavali su fraktalne tvorevine dobivene iteracijom (ponavljanjem). Bez računala nisu mogli uočiti njihov sadržaj smatrajući da je riječ o krivuljama, a ne o složenim geometrijskim oblicima. U to vrijeme nastale su Kochova krivulja i pahuljica, trokut i tepih Sierpinskog, Hilbertova krivulja i neki drugi oblici. Na kraju 20. stoljeća, pojmom samosličnosti, počeo se baviti poljski matematičar Benoit Mandelbrot. U svojim djelima nakon niza istraživanja i mjerenja britanske obale, Mandelbrot definira riječ fraktal, kao hrapav, izlomljen geometrijski oblik koji može biti podijeljen na manje dijelove od kojih je svaki umanjena kopija cjeline. Mandelbrot je svoje matematičke definicije potkrijepio računalnim vizualizacijama kojima i danas prikazujemo fraktale.

2.1. Benoit Mandelbrot

Poljski matematičar Benoit Mandelbrot otkrio je vezu [1]determinističkoga kaosa i fraktala te ujedno definirao riječ fraktal (slika 1).

Slika 1. *Benoit Mandelbrot*

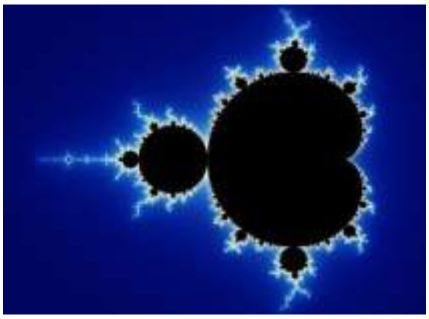
Izvor:
https://en.wikipedia.org/wiki/Benoit_Mandelbrot#/media/File:Benoit_Mandelbrot,_TED_2010.jpg

Bavio se istraživanjem promjena cijena pamuka tijekom 60 godina. Grafički je prikazivao te promjene za cijelo razdoblje i za kraća vremenska razdoblja. Uočio je da je niz promjena unutar podrazdoblja sličan promjenama cijena u cijelom razdoblju od 60 godina, bez obzira na duljinu podrazdoblja.

Proučavao je linije koje su prenosile informacije pomoću strujnih impulsa s računala na računalo, analizirao vremenske intervale te uočio da u nekim vremenskim intervalima postoje pogreške, a neki su bili bez pogrešaka. Shvatio je da postoji geometrijska povezanost između grupe uzastopnih pogrešaka i razmaka čistih prijenosa i da ta povezanost ima fraktalni oblik. Benoit Mandelbort se smatra ocem fraktala, a rezultati njegovog istraživanja upućuju na to da je svijet oko nas i unutar nas sastavljen od neke vrste fraktala. (Lesmoir-Gordon, Rood, Edney, 2006.). Najpoznatiji, a mnogima i najljepši, fraktalni oblik u matematici je Mandelbrotov skup (slika 2).

[1] Deterministički kaos je nepredvidivost sustava opisanih determinističkim jednadžbama.

Slika 2. *Mandelbrotov skup*



Izvor: https://www.wikiwand.com/sh/Mandelbrotov_skup

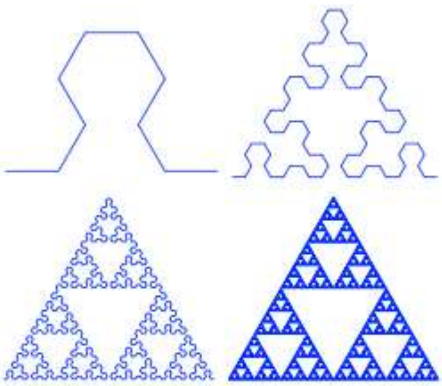
3. Svojstva fraktala

Fraktale možemo uvećati beskonačno puta i tako uočiti detalje koji prije nisu bili vidljivi. Osnovna svojstva fraktala su: samosličnost, fraktalna dimenzija i oblikovanje iteracijom.

3.1. Samosličnost

Samosličnost je svojstvo fraktala koje ukazuje na činjenicu da fraktal sliči sam sebi bez obzira koji dio promatrali i koliko puta ga uvećali. Kada se uveća jedan dio fraktalnoga objekta, vidi se obris prvotnoga lika od kojeg se počinje postupak. Geometrijska se samosličnost vidi kod trokuta Sierpinskoga (slika 3), Cantorovoga skupa (slika 4) i Kochove krivulje.
(Lesmoir-Gordon, Rood, Edney, 2006.).

Slika 3. *Trokut Sierpińskog*



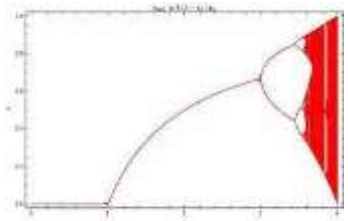
Izvor: https://www.wikiwand.com/sh/Trokut_Sierpi%C5%84skog

Slika 4. *Cantorov skup*

Izvor: https://www.enciklopedija.hr/Ilustracije/Cantorov%20skup.jpg

Kod statističke samosličnosti mali dio većega lika je sličan samom liku, ali nije njegova potpuna kopija. Morska obala je primjer samosličnosti. Povećavanjem grafa na [2]bifurkacijskom dijagramu koji predstavlja vezu fraktala i determinističkoga kaosa također uočavamo samosličnost (slika 6).

Slika 6. *Bifurkacijski dijagram*



Izvor: https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn%3AANd9GcTjDsXYqUT6d5TRueumuz-5tSSTzvuAwevbi77WlguMnDTjXufL

3.2. Fraktalna dimenzija

Fraktalna ili razlomljena dimenzija daje uvid u kojoj mjeri fraktal ispunjava prostor u kojem se nalazi. To je veličina koja ostaje konstantna bez obzira na mjerilo u kojem se gleda, a ne mora biti cijeli broj. Euklidska dimenzija je dimenzija kroz koju se promatra svijet i koristi se za izražavanje linija (jednodimenzionalna), površina ili ravnina (dvodimenzionalna) i prostora (trodimenzionalna). Nasuprot tome fraktalna dimenzija koristi se za izražavanje gustoće kojom objekt ispunjava prostor tj. prikazuje koliko se novih dijelova može pojaviti kada se poveća rezolucija. Fraktalnu dimenziju računamo prema izrazu:

---

[2] Bifurkacijski dijagram prikazuje udvostručavanje perioda atraktora i prijelaz regularnoga ponašanja dinamičkoga sustava u kaotično, ima fraktalnu strukturu. Predstavlja osnovnu vezu fraktala i determinističkoga kaosa.

$$d = \frac{\log(n)}{\log(s)} \qquad (1)$$

gdje je *d* fraktalna dimenzija, *n* broj novih kopija objekata promatrano nakon uvećanja, a *s* faktor uvećanja. (Gleick, 2000.)

3.3 Oblikovanje iteracijom

Iterativnost je svojstvo fraktalnoga objekta da se generira nekim matematičkim ili geometrijskim postupkom koji se uzastopno ponavlja. Postupak se može ponavljati beskonačno puta. Iteracijom dobivaju se vrijednosti koje se nazivaju interandima, a niz uzastopnih interanada zovemo vremenskom serijom.(Gleick, 2000.)

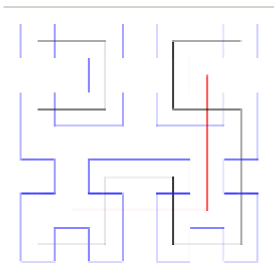
4. Podjela fraktala

4.1. Fraktali prema stupnju samosličnosti

4.1.1. Potpuno samoslični fraktali

Fraktali koji se sastoje od dijelova tako da su jednaki cijelom fraktalu. Kod ove vrste fraktala bitno je poznavati bazu i motiv. Fraktal se dobije ako se svaka linija baze nadomjesti oblikom motiva i taj proces se ponavlja u beskonačnost. Primjeri potpuno samosličnih fraktala su geometrijski fraktali; Cantorov skup, Kochova krivulja, Trokut Sierpinskoga,Hilbertova krivulja (slika7). (Antončić, Galinović, http://e.math.hr/galerija/galerija_print.html)

Slika 7. *Hilbertova krivulja*



Izvor: https://www.wikiwand.com/hr/Hilbertova_krivulja

4.1.2. Kvazi samoslični fraktali

Fraktali su približno, ali ne potpuno jednaki cijelom fraktalu. Primjeri kvazi samosličnih fraktala su Mandelbrotov skup i Julijini skupovi (slika 8). (Sabljak, 2018.)

Slika 8. *Julijini skupovi*

Izvor: https://nova-akropola.com/znanost-i-priroda/znanost/fraktali/#prettyPhoto

4.1.3. Statistički samoslični fraktali

Fraktali su s najmanjim stupnjem samosličnosti. To su fraktali koji ne sadrže kopije samoga sebe, ali njihove osobine kao što je fraktalna dimenzija ostaju iste pri različitim mjerilima. Primjer statistički samosličnog fraktala je Perlinov šum (Slika 9).

Slika 9. *Perlinov šum*

Izvor: https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf%3A496/datastream/PDF/view

4.2. Podjela fraktala prema načinu nastanka

4.2.1. Iterativni fraktali (geometrijski fraktali)

Fraktali koji nastaju kopiranjem, translatiranjem i/ili rotiranjem kopije, te mogućom zamjenom nekoga elementa kopijom. Primjer iterativnoga fraktala je Kochova krivulja.

4.2.2. Rekurzivni fraktali (algebarski fraktali)

Fraktali određeni rekurzivnom matematičkom formulom koja određuje pripada li neka određena točka prostora ili ne pripada određenom skupu.

4.2.3. Slučajni fraktali (stohastični fraktali)

Fraktali s najmanjim stupnjem samosličnosti. Primjere slučajnih fraktala nalazimo u prirodi (oblaci, morske obale, drveće, munje (slika 10.). (Jukić, 2016.)

Slika 10. *Primjer slučajnog fraktala (munja)*

Izvor: https://direktno.hr/upload/publish/167309/munja-pixabay_5d81078875062.jpg

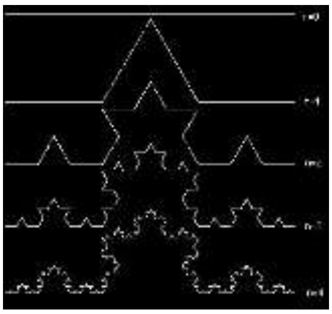
5. Kochova krivulja i Kochova pahuljica

Kochova krivulja i Kochova pahuljica jedne su od prvih opisanih fraktalnih krivulja. Kochovu krivulju predstavio je 1904. godine švedski matematičar Helge von Koch. Razlika između krivulje i pahuljice je u tome što se kod krivulje počinje s dužinom, a kod pahuljice s jednakostraničnim trokutom. (Bartošek, Picek, 2020.)

Počinje od segmenta (dužine) koji se dijeli na 3 jednaka dijela. Srednji dio zamijenjuje se dvjema stranicama jednakostraničnoga trokuta istih dužina kao uklonjeni dio, čime završava prvi korak kojim se dobijaju 4 sukladne dužine čija je duljina $\frac{1}{3}$ početne. Postupak se dalje nastavlja na isti način. Svaka od 4 dužine podijeli na 3 jednaka dijela te se srednji dio zamijeni stranicama jednakostraničnoga trokuta. Iterativni postupak ponavlja se u beskonačnost i tako se dobiva Kochova krivulja. (Jukić, 2016.)

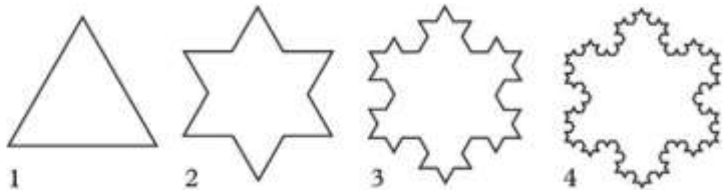
Spoje li 3 odgovarajuće rotirane kopije Kochove krivulje dobit će se Kochova pahuljica (slika 11). Za njezinu konstrukciju potreban je jednakostraničan trokut čija se svaka stranica podijeli na 3 jednaka dijela. Nakon što se podijelili svaka stranica, srednji dio zamijeni se jednakostraničnim trokutom kojem je uklonjena baza. Postupak se ponovlja na dobivenim dužinama. (Katalenac, 2015.)

Slika 11. *Konstrukcije Kochove krivulje*



Izvor: http://www.geocities.ws/rast_fraktala/fraktalna_dimenzija.html

Slika 12. *Konstrukcija Kochove pahuljice*

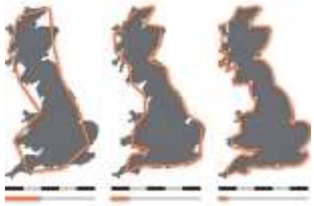


Izvor: https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=32180

5. Primjena fraktala

Mandelbrot je nastojao fraktale učiniti praktično primjenjivima u rješavanju svakodnevnih problema, te 1967. godine objavljuje članak pod nazivom „*How long is the coast of Britain*?"[3] Ovo naizgled jednostavno pitanje u sebi krije temelje samosličnosti i fraktalne geometrije. Uzevši u obzir svojstvo samosličnosti Mandelbrot je, uz pomoć fraktala, uspio pretvoriti obris britanskoga otoka u krivulju s neograničenim brojem detalja što mu je omogućilo izračun ukupne duljine obale do one preciznosti koja ima praktično značenje. (slika 13).

Slika 13. *Duljina Britanske obale*



Izvor: https://www.halapa.com/odmor/pravipdf/fraktalna.pdf

Fraktalne strukture možemo prepoznati pogledamo li drveće (slika 14), oblake, listove paprati (slika 15), bakterije, munje, sustav riječnih tokova, oblike planinskih lanaca itd. Svijet oko nas prepun je fraktalnih oblika.

Slika 14. *Fraktal u prirodi: drveće*

Izvor: http://rg.c-hip.net/2014/seminari/bartosek-picek/

[3] Koliko je duga obala Velike Britanije?

Slika 15. *Fraktal u prirodi: paprat*

Izvor: https://libertasnova.wordpress.com/2017/02/20/fraktalna-geometrija-matematika-u-sluzbi-majke-prirode/

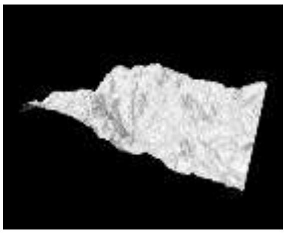
Fraktali se, u fizici, koriste za proučavanje determinstičkoga kaosa. Fraktalna analiza predstavlja suvremenu i egzaktnu metodu sa širokom primjenom u molekularnoj i staničnoj fiziologiji te u kliničkim medicinskim znanostima. Koristi se za mjerenje kompleksnosti bioloških struktura poput tkiva, individualnih stanica i njihovih organela. Na razini stanice, fraktalna analiza koristi se za procjenu finih strukturnih promjena u stanici koje se ne mogu uočiti standardnim optičkim ili elektronskim mikroskopom. U kliničkoj praksi, primjenjuje se za analizu varijabilnosti srčanoga ritma, dijagnosticiranje nekih oftalmoloških oboljenja te za opisivanje tumorskih stanica. Površina tumorskih stanica sastoji se od pregiba i nabora te i one imaju fraktalna svojstva koja se mijenjaju ovisno o stadiju raka. Ta se činjenica danas koristi za rano otkrivanje tumorskih stanica u tijelu.

Otkucaji ljudskoga srca naizgled se čine pravilnima, ali detaljnijim proučavanjem njihovoga vremenskoga redoslijeda otkriva se fraktalna struktura koja ima poseban značaj u kardiologiji. Srčana bolest može se otkriti uz pomoć ekstremnoga i aritmičnoga fraktalnoga ponašanja.

Fraktalne strukture koriste se za predviđanje širenja šumskoga požara i promjena vrijednosti dionica na financijskom tržištu. (Dobrić Žaja, 2020.)

Fraktalna geometrija je područje koje se u sklopu računalne grafike neprestano razvija. Fraktali se primjenjuju kod kreiranja računalnih igrica za prikaz objekata u virtualnoj stvarnosti i kod kreiranja filmova. Pomoću fraktala jednostavno se simuliraju tereni i reljef – crtanje raslinja, grmlja, drveća, trava i planina (slika 16). Simulacija reljefa provodi se tako da se vodoravno položenom trokutu svaki vrh povisi ili snizi za neku vrijednost. Potom se takvom trokutu spoje polovišta stranica kako bi se dobila četiri nova trokuta. Tim novim trokutima se opet snižavaju ili povisuju vrhovi, ali koristeći dvostruko manje vrijednosti. Iteracijom ovoga postupka simulira se izgled prirodnoga krajolika. Planine se mogu simulirati i uz pomoć Perlinovoga šuma, funkcije sastavljene od više funkcija od kojih svaka ima „izbočine“ i „udubine“. (Lesmoir-Gordon, Rood, Edney, 2006.).

Slika 16. *Simulacija planina uz pomoć Perlinovoga šuma*



Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fractal_terrain.jpg

Primjenu su našli i u naftnoj industriji za određivanje fraktalne dimenzije viskoznoga prstenastoga grananja u šupljikavom sredstvu i u astronomiji gdje fraktalna struktura služi za opisivanje svemira na malim udaljenostima.

Struktura svemira je vrlo samoslična. Znanstvenici se slažu da na malim udaljenostima svemir ima fraktalnu strukturu.

Antene koje se koriste u mobilnim telefonima dizajnirane prema obliku nekog fraktala osjetljive su na širok spektar različitih frekvencija. Uglavnom imaju oblik klasičnih fraktala poput Kochove krivulje. Osim za mobilne telefone, fraktalne antene koriste se u uređajima za vojnu komunikaciju.

Veliku popularnost fraktali su stekli i u umjetnosti, iako nisu priznati među klasičnim umjetnicima jer fraktale generira računalo, a ne čovjek.

7. Zaključak

Svijet oko nas je prepun oblika i linija koje se ne mogu opisati klasičnom geometrijom. No, zahvaljujući razvoju i otkriću fraktala te fraktalne geometrije pronađen je način za njihovo shvaćanje. Povećanjem jednoga dijela fraktalnoga objekta, dobivaju se obrisi prvobitnoga lika od kojega smo počeli postupak. Ti se geometrijski objekti mogu uvećavati beskonačno puta tako da se pri svakom povećanju mogu vidjeti detalji koji prije povećanja nisu bili vidljivi. Mogli bismo zaključiti da su Mandelbrotova otkrića dovela do prave revolucije u znanstvenom svijetu. Koriste se u matematici, fizici, biologiji, medicini, računalnoj grafici, umjetnosti, astronomiji i naftnoj industriji. Jedna od značajnijih primjena fraktala je oponašanje rada neuronskih mreža za razvoj umjetne inteligencije koja bi u budućnosti mogla donijeti značajnije promjene u načinu života.

Literatura

1. Gleick, J. (2000). *Kaos – stvaranje nove znanosti*. Zagreb, Tiskara Puljko
2. Katalenac, I. (2015). *Fraktali – Koch*. https://hrcak.srce.hr/15883, str.134 -139 (27.3.2020.)
3. Bartošek, G., S. Picek. *3D Fraktali*. http://rg.c-hip.net/2014/seminari/bartosek-picek/ (27.3.2020.)
4. Antočić, V., Galinović A, Hrvatski matematički elektronski časopis math.e. *Galerija fraktala*. http://e.math.hr/galerija/galerija_print.html (27.3.2020.)
5. Sabljak, A. (2018). *Klasični fraktali*. Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek.
6. Lesmoir-Gordon, N., Rood, W., Edney, R., (2006). Fraktalna geometrija za početnike, Naklada Jesenski i Turk, Zagreb
7. Mandelbrot, B., The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman and Company, New York, 1983
8. Dobrić,Žaja,S.*Fraktali*.https://novaakropola.com/znanostipriroda/znanost/fraktali/#prettyPhoto (27.3.2020.)
9. Jukić, M. (2016). *Fraktali*. Zagreb, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije.